ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère de l'Éducation Nationale
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
Tél. : 45 51 32 59

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE 1987

MATHÉMATIQUES : 1ère ÉPREUVE
(Voie Générale)

DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

Problème I

Dans tout le problème, $\mathcal{M}_3$ désigne l'ensemble des matrices carrées à éléments réels, à 3 lignes et 3 colonnes. Si A appartient à $\mathcal{M}_3$, on note a_{ij} l'élément de la iième ligne et de la jième colonne de A ($i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$).
$\mathcal{M}_3$ est muni de sa structure habituelle d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des réels et de sa structure d'anneau.
On considère le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_3$ formé des matrices A telles que les six nombres réels :

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} \ (i = 1, 2, 3) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{3} a_{kj} \ (j = 1, 2, 3)$$

soient égaux. On note d(A) la valeur commune de ces six nombres. Enfin, J désigne la matrice de $\mathcal{M}_3$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

I. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$ et que l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $A \to d(A)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$.

II. 1°) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_3$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que :

$$AJ = JA = \lambda J.$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3$.

2°) Si A est une matrice inversible de $\mathcal{E}$, montrer que d(A) est non nul, que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$ et comparer d(A) et $d(A^{-1})$.

3°) Soit A un élément de $\mathcal{E}$. On pose $B = \frac{d(A)}{3} J$ et $C = A - B$.
Calculer BC et CB.
En déduire la valeur de A^p en fonction de B^p et C^p pour p entier strictement positif.

III. 1°) Soient $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ constitué des matrices A telles que $d(A) = 0$ et $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ constitué des matrices de la forme λJ, où λ est un nombre réel quelconque.
Prouver que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{E}$.

2°) On considère les matrices suivantes :

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que l'ensemble de ces quatre matrices A_{rs} ($r = 2,3$; $s = 2,3$) constitue une base de $\mathcal{F}$.
Quelles sont les dimensions de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{E}$?

IV. On considère maintenant le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ formé des matrices A telles que les huit nombres réels :

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} \ (i = 1, 2, 3) ; \quad \sum_{k=1}^{3} a_{kj} \ (j = 1, 2, 3) ; \quad \sum_{i=1}^{3} a_{ii} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i}$$

soient égaux. Une telle matrice est dite matrice magique.

1°) Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ constitué des matrices magiques antisymétriques. Quelle est la valeur commune des huit sommes d'une matrice de $\mathcal{A}$? Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{A}$.

2°) Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ constitué des matrices magiques symétriques. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{S}$.

3°) En déduire la dimension de $\mathcal{H}$.

PROBLEME II (Les parties I et II sont indépendantes).

Partie I :

On considère l'application $f_{\lambda,\mu}$: $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to (\lambda x + \mu) e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$ où λ et μ sont deux nombres réels positifs.

1°) Montrer que pour la construction des courbes $\Gamma_{\lambda,\mu}$ ($\lambda \neq 0$) représentatives des fonctions $f_{\lambda,\mu}$, on peut se borner à l'étude des fonctions de type $f_{1,\mu}$ ($\mu \geq 0$).

2°) Etudier les variations de $f_{1,\mu}$ ($\mu \geq 0$).

3°) Déterminer le nombre de points d'inflexion d'une courbe $\Gamma_{1,\mu}$ et construire l'ensemble de ces points lorsque μ varie.

4°) Tracer les courbes $\Gamma_{1,0}$ et $\Gamma_{1,1}$ dans un repère orthonormé.

Tournez la page S. V. P.

Partie II :

1°) On considère une suite (Q_n) de polynômes à coefficients réels vérifiant :

$$\forall k \geqslant 1 \qquad Q_{k-1}(X) = X\,Q_k(X) + k\,Q_{k-1}(X) \qquad (1)$$

a) Montrer que si les termes d'une suite (Q_n) vérifient l'égalité (1) ; ils vérifient alors :

$\forall k \geqslant 2 \qquad Q'_{k-1}(X) - (k+1)\,Q_k(X)$

$= X\,[Q'_k(X) - k\,Q_{k-1}(X)] + k\,[Q'_{k-1}(X) - (k-1)\,Q_{k-2}(X)]$

où Q'_i désigne le polynôme dérivé du polynôme Q_i.

En déduire qu'à toute suite (Q_n) vérifiant l'égalité (1) est associée une suite unique (R_n) de polynômes vérifiant l'égalité (1) et tels que :

$$\forall k \geqslant 1 \qquad R_k(X) = Q'_k(X) - k\,Q_{k-1}(X).$$

Si $Q_0(X) = X - 1$ et $Q_1(X) = X - 1$, déterminer R_0, R_1, R_2.

b) Démontrer l'existence d'une suite unique (P_n) de polynômes unitaires (le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1), vérifiant :

$\forall k \geqslant 1 \qquad P_{k-1}(X) = X\,P_k(X) - P'_k(X)$ et $P'_k(X) = k\,P_{k-1}(X)$.

Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

2°) Soit C l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Les dérivées d'un élément f de C seront notées f', f'', ... $f^{(k)}$, ...

Si σ désigne un endomorphisme de C, on note $\sigma \circ \sigma = \sigma^2$ et $\sigma^{k-1} \circ \sigma = \sigma^k$; σ^0 désignant l'application identique de C.

On considère l'endomorphisme φ : $\begin{cases} C \to C \\ f \to \varphi(f) = f' - x\,f. \end{cases}$

a) Déterminer $\varphi^2(f)$. Expliciter $\varphi(f)$ et $\varphi^2(f)$ pour la fonction $f_{\lambda,\mu}$ définie dans la partie I.

b) Déterminer les noyaux Ker φ et Ker φ^2.

(On recherchera les fonctions f éléments de ces noyaux sous la forme : $f(x) = g(x)\,e^{-x^2/2}$; et on précisera les fonctions g correspondant aux cas Ker φ et Ker φ^2).

c) On considère les fonctions polynômes $x \to P_k(x)$ où P_k sont les polynômes définis dans la question II 1°). Calculer $\varphi(P_k)$.

d) A tout nombre réel α, on associe l'élément F_α de C défini par :

$F_\alpha(x) = e^{\alpha x - \alpha^2/2}$.

Démontrer par récurrence sur k entier naturel :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi^k(F_\alpha(x)) = P_k(x + \alpha) \cdot F_\alpha(x)$$

(P_k désignant toujours les fonctions polynômes définies au 2°) c)).

e) Si $H(x) = e^{-x^2/4}$, montrer que la dérivée kième $H^{(k)}(x)$ peut s'écrire sous la forme $H^{(k)}(x) = T_k(x) \cdot H(x)$ où $T_k(x)$ est une fonction polynôme que l'on exprimera en fonction de $P_k(ix)$, i désignant le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.